50. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

500511

Hier findest du sieben Zahlenfolgen. Sie fangen – bis auf die letzte – immer mit den Zahlen 2 und 3 an, gehen dann aber unterschiedlich weiter: Sie sind jeweils nach einer anderen Vorschrift aufgebaut.

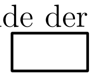
Setze jede Zahlenfolge um drei Zahlen fort und gib jeweils die Vorschrift an.

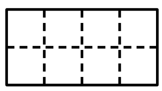
a) 2, 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, ___, ___, ___
b) 2, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 6, 4, 5, 6, ___, ___, ___
c) 2, 3, 6, 7, 14, 15, 30, 31, 62, ___, ___, ___
d) 2, 3, 4, 3, 5, 7, 5, 8, 11, 8, 12, 16, ___, ___, ___
e) 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, ___, ___, ___
f) 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ___, ___, ___
g) 1, 1, 2, 4, 8, 16, ___, ___, ___

500512

In der Turnhalle der Linden-Schule stehen mehrere gleich lange Bänke. Zwei Gruppen haben gerade gemeinsam Sport. Es setzen sich immer sechs Kinder auf eine Bank, aber die letzte Bank wird nicht voll; da sitzen nur drei Kinder. Wenn sich nur fünf Kinder auf eine Bank setzen würden, dann würden nicht alle Kinder sitzen können, vier von ihnen müssten stehen.

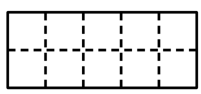
a) Wie viele Kinder sind in der Turnhalle, und wie viele Bänke stehen dort?

Am Ende der Stunde soll Nick aufräumen. Er soll vier Zweierhocker  auf die nebenstehende Fläche stellen.



b) Zeichne alle Möglichkeiten auf, wie er die vier Hocker auf die Fläche stellen kann.

c) Nun kommt Lucas angerannt. Er hat noch einen fünften Zweierhocker gefunden.
Zeichne wieder alle Möglichkeiten auf, wie sie jetzt die fünf Hocker auf die neue, größere Fläche stellen können.



Auf der nächsten Seite geht es weiter!

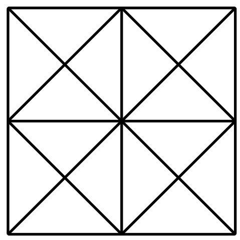
500513

Jens kommt kurz vor seinem Geburtstag zu seinem Opa. Opa holt einen großen Sack mit vielen Münzen und sagt: „Pass' mal auf, Jens. In diesem Sack sind viele Münzen mit allen Werten, die es gibt, also 1 Cent, 2 Cent, 5 Cent, 10 Cent, 20 Cent, 50 Cent, 1 Euro und 2 Euro. Du darfst dir davon 20 Münzen aussuchen – halt, stopp, warte – aber du musst aus diesen 20 Münzen zwei Geldbeträge gleichzeitig auf den Tisch legen können; einer soll 5,34 € betragen, der andere 4,66 €. Zehn Euro sind dir also sicher. Ach ja, jeder Münzwert soll auf dem Tisch mindestens einmal vorkommen. So, wie viel Geld schenke ich dir maximal?“

a) Beantworte die Frage für Jens.
b) Wie viel hätte Jens maximal geschenkt bekommen, wenn er die Geldbeträge 5,35 € und 4,65 € hätte legen sollen und Opa immer noch gefordert hätte, dass alle Münzwerte auf dem Tisch mindestens einmal vorkommen?

500514

Niklas hat die gegebene Figur in der rechten Abbildung gezeichnet und will die in ihr vorkommenden Vierecke zählen. Dazu überlegt er erst einmal, welche verschiedenen Formen und Größen von Vierecken vorkommen; er entschließt sich, sich auf Quadrate, Rechtecke, die keine Quadrate sind, und Parallelogramme, die keine Rechtecke sind, zu beschränken.



Suche nach diesen Quadraten, Rechtecken und Parallelogrammen in der Figur. Dabei sollen sich diese Vierecke in Form oder Größe unterscheiden, sie sollen also nicht deckungsgleich sein.

Zeichne für jedes der verschieden aussehenden Vierecke eine neue Grundfigur und kennzeichne das Viereck farbig. Schreibe neben jede Zeichnung, wie oft man dieses Viereck in der Grundfigur finden kann.

50. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

500611

Maria und Rebecca kramen auf dem Dachboden beim Opa in alten Kisten. Opa war Mathematiklehrer und hat sich gerne Kryptogramme ausgedacht. Sie finden vier Stück und wollen sie nun lösen. Beim Knobeln stellen sie fest, dass das gar nicht so einfach geht, denn es sind Kryptogramme dabei, die mehrere Lösungen haben.

$$\begin{array}{rcccc} & & A & B & B \\ + & & B & B & A \\ \hline & C & A & B & C \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & & A & B \\ + & & A & C \\ \hline & D & C & B \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & A & B & C \\ + & D & E & F \\ \hline & G & H & I \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & A & B & C \\ - & F & A & C \\ \hline & B & A & G \end{array}$$

Kryptogramm (1) Kryptogramm (2) Kryptogramm (3) Kryptogramm (4)

In einem Kryptogramm werden gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern ersetzt und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern. Der erste Buchstabe jeder Zahl darf keine 0 sein.

a) Finde eine Lösung des Kryptogramms (1).
b) Finde alle Lösungen des Kryptogramms (2).
c) Finde eine Lösung des Kryptogramms (3).
d) Finde drei verschiedene Lösungen des Kryptogramms (4). In jeder der drei Lösungen soll der Buchstabe A durch eine andere Ziffer ersetzt werden.

500612

Jede natürliche Zahl hat eine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren (PFZ). Zum Beispiel ist $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$ oder $1230 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 41$. Wir nennen in dieser Aufgabe die Anzahl der Primfaktoren einer Zahl ihre Primlänge. Die beiden Zahlen 36 und 1230 haben also beide die Primlänge 4.

a) Welche Primlänge können zweistellige Zahlen höchstens haben?
b) Gib alle zweistelligen Zahlen an, die diese größtmögliche Primlänge aufweisen.
c) Gib alle zweistelligen Zahlen mit der Primlänge 5 an.
d) Finde die größte Primlänge für dreistellige Zahlen.
e) Gib alle dreistelligen Zahlen an, die diese größte Primlänge aufweisen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

500613

Die drei Freunde Michi, Niki und Omar aus Hamburg kommen zum Abschluss ihrer Schulzeit auf eine ausgefallene Idee. Sie wollen einen Ausflug zur 150 km entfernten Floßburg machen. Das Ausgefallene an ihrem Plan ist, dass sie nur einen Motorroller für zwei Personen zur Verfügung haben. Natürlich können sie auch zu Fuß gehen; ein Fußgänger schafft 5 km in der Stunde. Sie sprechen mehrere Möglichkeiten durch, um ihr Vorhaben umzusetzen.

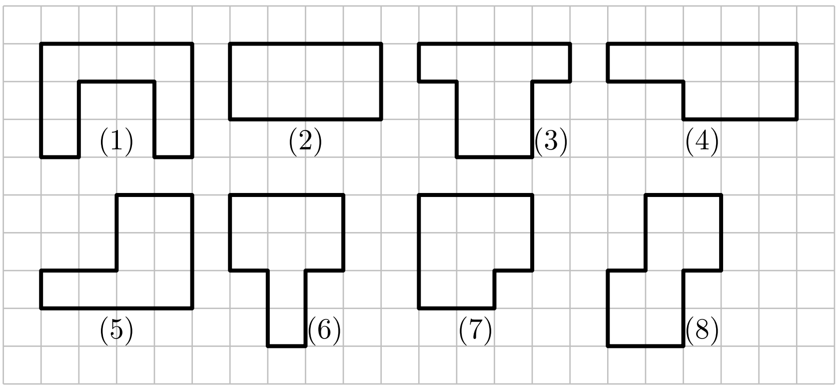
a) Omar sagt: „Keiner von uns soll laufen. Und wir lassen den Roller ganz gemütlich mit 60 km/h fahren.“ Wie können sie es machen und wie lange dauert es dann, bis alle drei an der Floßburg sind?

b) Das dauert Niki zu lange. Er erklärt sich bereit, zur selben Zeit, in der seine beiden Freunde mit dem Roller zur Floßburg starten, in Hamburg loszulaufen. Er will vier Stunden gehen und dann warten, bis ihn einer seiner Freunde abholt. Er möchte aber auch, dass der Roller solange mit 70 km/h gefahren wird, bis er abgeholt wird; danach soll der Roller mit 65 km/h fahren.
Wie lange wäre dann die Wartezeit für Niki, und wie lange dauert es, bis alle an der Floßburg sind?

c) Michi sagt: „Der Roller kann auch 75 km/h fahren. Ich laufe in Hamburg los, ihr fahrt zur Floßburg, dann soll einer sofort umdrehen und mich unterwegs aufnehmen.“
Wie weit muss Michi nach seiner Idee laufen? Wie lange dauert es, bis alle drei Freunde auf diese Weise zur Floßburg kommen? (Vor einer genauen Lösung ist eine Schätzung sinnvoll.)

500614

In einem Puzzle gibt es acht verschiedene, rechtwinklige, flächengleiche Formen, die jeweils 8 Kästchen umfassen. Von jeder Form sind ausreichend viele Teile vorhanden, die auch gedreht und umgeklappt verwendet werden dürfen.



a) Wähle drei verschiedene Teile aus den 8 Puzzle-Formen aus und lege daraus ein Rechteck. Finde zwei Möglichkeiten, in denen alle drei Puzzle-Formen unterschiedlich sind.

b) Wie viele dieser Rechtecke aus a) benötigst du, um daraus das kleinstmögliche Quadrat zu legen? Wie groß ist die Seitenlänge dieses Quadrates?

c) Lege ein Quadrat (12×12 Kästchen) mit nur zwei verschiedenen Puzzle-Formen aus; sie müssen nicht in der gleichen Anzahl vorkommen.
Gib zwei Möglichkeiten an, in denen nicht die beiden gleichen Puzzle-Formen verwendet werden.

d) Wähle fünf verschiedene Formen aus und lege aus diesen fünf Teilen ein Rechteck.

e) Wenn du Zeit und Lust hast: Lege aus acht verschiedenen Puzzle-Teilen ein Quadrat.

50. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

500711

Tim und Stefanie unterhalten sich und stellen fest, dass die Mathematik-Olympiade dieses Jahr ihren 50. Geburtstag feiert. Darauf meint Stefanie, dass sie ein gutes Rätsel kenne. Tim will es sofort hören. Also sagt Stefanie: „Denke dir eine Zahl und addiere zu ihr 17, multipliziere das Ergebnis mit 3 und subtrahiere deine Zahl. Anschließend subtrahiere 1. Danach dividiere das Ergebnis durch 2 und subtrahiere erneut die von dir gedachte Zahl, abschließend multipliziere mit 2. Wetten, du erhältst 50?“ Obwohl Tim das vorausgesagte Ergebnis erhält, will er nicht glauben, dass jede beliebige Zahl die Geburtstagszahl der Mathematik-Olympiade liefert.

a) Zeige an einem selbstgewählten Beispiel, dass Stefanie bei diesem Beispiel recht hat.
b) Untersuche, ob man bei jeder gedachten Zahl tatsächlich das von Stefanie vorausgesagte Ergebnis erhält.

500712

Auf einem Tisch stehen 4 geschlossene Kästchen. Eines davon enthält Goldklumpen, eines Sand, eines Kieselsteine und eines Holzkugeln. Drei dieser Kästchen sind beschriftet. Auf einem steht „Gold oder Sand“, auf einem anderen „Kieselsteine oder Holz“ und auf dem dritten „Gold oder Holz“. Anna darf sich eines dieser Kästchen auswählen und möchte natürlich das mit dem Gold bekommen. Sie erfährt, dass alle Aufschriften der Wahrheit entsprechen. Anna darf zwar keines der Kästchen anfassen, aber bevor sie eines auswählt, darf sie sich eines öffnen lassen und hineinschauen.

Untersuche, ob es für Anna eine Möglichkeit gibt, mit Sicherheit das Kästchen mit dem Gold zu erhalten.

500713

Ein Dreieck ABC hat die folgenden Eigenschaften:

(1) Die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sind gleich lang.
(2) Die Winkelhalbierende des Innenwinkels BAC schneidet die Seite $\overline{BC}$ im Punkt E.
(3) Die Gerade AE steht senkrecht auf der Seite $\overline{BC}$.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Größen der Innenwinkel im Dreieck ABC eindeutig bestimmen lassen. Wenn dies der Fall ist, dann gib diese Winkelgrößen an.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

500714

Kurt spielt mit einem Satz Bauklötze.

a) Er hat genau einen Würfel mit der Kantenlänge 7 cm, je fünf Würfel mit den Kantenlängen 4 cm und 3 cm, sechs Würfel mit der Kantenlänge 2 cm und zwölf Würfel mit der Kantenlänge 1 cm.

   Weise nach, dass Kurt aus diesen Spielwürfeln keinen vollständigen Quader bauen kann, wenn er dabei alle Würfel verwenden will.

b) Nun hat Kurt genau einen Würfel mit der Kantenlänge 6 cm, acht Würfel mit der Kantenlänge 4 cm, fünfzehn Würfel mit der Kantenlänge 2 cm und zehn Würfel mit der Kantenlänge 1 cm zur Verfügung.

   Untersuche, ob Kurt aus diesen Spielwürfeln einen vollständigen Quader bauen kann, wenn er dabei wieder alle Würfel verwenden will. Begründe deine Antwort auch hier.

Mathematische Grundlagen: Viele mathematische Aufgaben kann man den Grundtypen *Beweisaufgabe* oder *Bestimmungsaufgabe* zuordnen.

Eine Beweisaufgabe enthält *gegebene Bedingungen* oder *Größen.* Das herzuleitende Ziel ist bekannt. Wie beim Beweis eines mathematischen Satzes lassen sich die Aussagen in *Voraussetzung* und *Behauptung* aufspalten und in der „Wenn-dann-Form“ formulieren. Ein *Beweis* ist erbracht, wenn man von den Voraussetzungen ausgehend in endlich vielen Schritten über *logisch abgeleitete Feststellungen* zur Behauptung gelangt. Jeder Beweisschritt ist eine *Schlussfolgerung.* Eine Schlussfolgerung kann notiert werden, indem festgehalten wird, von welchen Voraussetzungen oder abgeleiteten Feststellungen ausgehend man zu welcher neuen Feststellung gelangt und welches *Beweismittel* dabei eingesetzt wurde. Als Beweismittel dürfen mathematische Sätze, Definitionen, Formeln oder Umformungsregeln verwendet werden.

Jede *Bestimmungsaufgabe*, hier Aufgabe 500713, enthält *gegebene Bedingungen* oder *Größen* und *gesuchte, unbekannte Größen.* Eine gesuchte Größe im mathematischen Sinne zu *bestimmen* heißt, diese Größe aus den gegebenen Größen und eventuell weiteren wahren Aussagen durch korrektes logisches Schließen durch Anwendung mathematischer Sätze und mathematisch zulässiger Umformungen zu ermitteln. Es ist dabei im Allgemeinen auch zu untersuchen, ob das zu bestimmende Objekt überhaupt existiert und, wenn es existiert, ob es eindeutig bestimmt ist. Die Lösung einer Bestimmungsaufgabe kann man daher im Allgemeinen in zwei Schritte gliedern: Im ersten Schritt nimmt man die Existenz der Lösung an und zeigt, dass die Lösungen zu einer hergeleiteten Menge gehören müssen. Im zweiten Schritt zeigt man, dass die Elemente dieser Menge tatsächlich Lösungen sind. Dieser Schritt heißt daher auch *Existenzbeweis* oder *Probe.* Eine Bestimmungsaufgabe kann also mehrere Beweise beinhalten.

Etwas komplizierter ist die Situation bei Aufgaben, bei denen zu *untersuchen* ist, ob etwas existiert. Je nachdem, ob man die Nichtexistenz oder die Existenz vermutet, sind unterschiedliche Beweise zu führen. Bei der Nichtexistenz könnte es ein Widerspruchsbeweis sein und wir hätten eine Beweisaufgabe. Zum Nachweis der Existenz einer Lösung könnte man zum Beispiel eine Lösung angeben. Diese Lösung herzuleiten ist eine Bestimmungsaufgabe.

Um angeben zu können, aus welcher gegebenen Bedingung eine Schlussfolgerung gezogen wurde, ist es günstig, die gegebenen Bedingungen zu bezeichnen, im Fall von Aufgabe 500713 mit (1), (2) und (3). Dies trifft auch auf *abgeleitete Feststellungen* zu, auf die später zurückgegriffen wird. Diese können bei Aufgabe 500713 mit (4), (5) usw. bezeichnet werden. Aus der Formulierung „Ein Dreieck ABC hat“ ist hier zu entnehmen, dass die zu bestimmenden Innenwinkel existieren. Deren Existenz ist hier also nicht mehr zu beweisen. Zu zeigen ist aber noch, dass es unter den gegebenen Voraussetzungen nur eine Lösung gibt. Im Allgemeinen würde die Formulierung „untersuche, ob“ die Existenz des Objektes aber offen lassen.

50. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

500811

Anlässlich des 50. Geburtstages der Mathematik-Olympiade lädt Professor Knobelfix eine gewisse Anzahl guter Schüler zu einem mathematischen Ferienlager ein. In seiner Eröffnungsrede stellt Prof. Knobelfix fest: „Wenn jeder Teilnehmer am Ende der Veranstaltung mit jedem anderen genau eine Fotografie von sich selbst austauschen würde, dann müssten insgesamt genau 2450 Fotos verteilt werden.“

Untersuche, ob aus der Feststellung von Prof. Knobelfix eindeutig bestimmt werden kann, wie viele Schüler am Ferienlager teilnehmen. Ist dies der Fall, dann gib die Anzahl dieser Schüler an.

500812

Auf einem Kreis k liegen in dieser Reihenfolge sechs paarweise voneinander verschiedene Punkte A, B, C, D, E und F.

a) Ermittle die Anzahl der Dreiecke, die jeweils drei dieser sechs Punkte als Eckpunkte haben.

b) Ermittle die Anzahl der konvexen Vierecke, die jeweils vier dieser sechs Punkte als Eckpunkte haben.

c) Ermittle die Anzahl der konvexen Fünfecke, die jeweils fünf dieser sechs Punkte als Eckpunkte haben.

Hinweis: Ein n-Eck $P_1P_2\dots P_n$ mit Ecken auf einem Kreis ist genau dann konvex, wenn seine Eckpunkte P_1, P_2, …, P_n in dieser Reihenfolge auf diesem Kreis liegen.

500813

Paul hat die rechts stehende Methode für das Quadrieren zweistelliger Zahlen entdeckt.

$$\begin{array}{c} 67^2 \\ \hline 42 \\ 3649 \\ 42 \\ \hline 4489 \end{array}$$

a) Erkläre diese Methode und berechne auf die gleiche Weise 59^2, 82^2 und 19^2.

b) Erkläre, warum dieses Rechenverfahren funktioniert.

c) Finde und erkläre ein entsprechendes Verfahren für das Quadrieren dreistelliger Zahlen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

500814

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit folgenden Eigenschaften:

(1) Auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt ein Punkt D.

(2) Die Größe α des Innenwinkels BAC ist kleiner als $45°$.

(3) Die Größe des Winkels BDC ist gleich dem Dreifachen von α.

(4) Die Größen der Winkel ACB und BDC sind gleich.

a) Ermittle die Größe β des Winkels CBA für den Fall, dass $\alpha = 20°$ gilt.

b) Ermittle für alle möglichen Werte von α die Größe β des Winkels CBA in Abhängigkeit von α.

c) Ermittle alle Werte α, für die ABC ein rechtwinkliges Dreieck ist.

Hinweis: Bei Aufgabenteil c) kann auf den Existenznachweis der Dreiecke verzichtet werden.

Mathematische Grundlagen: Viele mathematische Aufgaben kann man den Grundtypen *Beweisaufgabe* oder *Bestimmungsaufgabe* zuordnen.

Eine Beweisaufgabe enthält *gegebene Bedingungen* oder *Größen*. Das herzuleitende Ziel ist bekannt. Wie beim Beweis eines mathematischen Satzes lassen sich die Aussagen in *Voraussetzung* und *Behauptung* aufspalten und in der „Wenn-dann-Form“ formulieren. Ein *Beweis* ist erbracht, wenn man von den Voraussetzungen ausgehend in endlich vielen Schritten über *logisch abgeleitete Feststellungen* zur Behauptung gelangt. Jeder Beweisschritt ist eine *Schlussfolgerung*. Eine Schlussfolgerung kann notiert werden, indem festgehalten wird, von welchen Voraussetzungen oder abgeleiteten Feststellungen ausgehend man zu welcher neuen Feststellung gelangt und welches *Beweismittel* dabei eingesetzt wurde. Als Beweismittel dürfen mathematische Sätze, Definitionen, Formeln oder Umformungsregeln verwendet werden.

Jede *Bestimmungsaufgabe*, hier Aufgabe 500814, enthält *gegebene Bedingungen* oder *Größen* und *gesuchte, unbekannte Größen*. Eine gesuchte Größe im mathematischen Sinne zu *bestimmen* heißt, diese Größe aus den gegebenen Größen und eventuell weiteren wahren Aussagen durch korrektes logisches Schließen durch Anwendung mathematischer Sätze und mathematisch zulässiger Umformungen zu ermitteln. Es ist dabei im Allgemeinen auch zu untersuchen, ob das zu bestimmende Objekt überhaupt existiert und, wenn es existiert, ob es eindeutig bestimmt ist. Die Lösung einer Bestimmungsaufgabe kann man daher im Allgemeinen in zwei Schritte gliedern: Im ersten Schritt nimmt man die Existenz der Lösung an und zeigt, dass die Lösungen zu einer hergeleiteten Menge gehören müssen. Im zweiten Schritt zeigt man, dass die Elemente dieser Menge tatsächlich Lösungen sind. Dieser Schritt heißt daher auch *Existenzbeweis* oder *Probe*. Eine Bestimmungsaufgabe kann also mehrere Beweise beinhalten.

Etwas komplizierter ist die Situation bei Aufgaben, bei denen zu *untersuchen* ist, ob etwas existiert. Je nachdem, ob man die Nichtexistenz oder die Existenz vermutet, sind unterschiedliche Beweise zu führen. Bei der Nichtexistenz könnte es ein Widerspruchsbeweis sein und wir hätten eine Beweisaufgabe. Zum Nachweis der Existenz einer Lösung könnte man zum Beispiel eine Lösung angeben. Diese Lösung herzuleiten ist eine Bestimmungsaufgabe.

Um angeben zu können, aus welcher gegebenen Bedingung eine Schlussfolgerung gezogen wurde, ist es günstig, die gegebenen Bedingungen zu bezeichnen, im Fall von Aufgabe 500814 mit (1), (2), (3) und (4). Dies trifft auch auf *abgeleitete Feststellungen* zu, auf die später zurückgegriffen wird. Diese können bei Aufgabe 500814 mit (5), (6) usw. bezeichnet werden. Aus der Formulierung „Gegeben ist ein Dreieck ABC“ ist hier zu entnehmen, dass die zu bestimmenden Innenwinkel existieren. Deren Existenz ist hier also nicht mehr zu beweisen. Zu zeigen ist aber noch, dass es unter den gegebenen Voraussetzungen bei den Aufgabenteilen a) und b) nur eine Lösung gibt. Im Allgemeinen würde die Formulierung „untersuche, ob“ die Existenz des Objektes aber offen lassen.

50. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 9–10
Aufgaben

Hinweise: 1. *Es stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

501011

Jenny schreibt die ersten vier positiven Quadratzahlen auf: 1, 4, 9, 16. In der nächsten Zeile notiert sie jeweils unter dem Zwischenraum zweier benachbarter Quadratzahlen deren Differenz: 3, 5, 7. Darunter schreibt sie die Differenzen dieser Zahlen, also jeweils eine 2.

1		4		9		16
	3		5		7	
		2		2		

a) Bestätigen Sie am Beispiel der Zahlen 25 und 36, dass auch bei einer Verlängerung der ersten Zahlenfolge die Differenzen in der dritten Zeile nur noch den Wert 2 annehmen.

b) Führen Sie eine entsprechende fortgesetzte Differenzbildung für die Folge der Kubikzahlen 1^3 bis 5^3 so lange durch, bis erstmals eine Zeile mit unveränderten Werten erscheint. Beweisen Sie, dass diese Differenz auch bei der Verwendung weiterer Kubikzahlen auftreten muss.

c) Weiten Sie Ihre Untersuchungen auf Potenzen mit größeren Exponenten aus. Nutzen Sie die dabei erkannten Gesetzmäßigkeiten zur Vorhersage, nach wie vielen Zeilen bei zehnten Potenzen erstmals ein konstanter Wert auftritt und wie groß dieser sein muss.

501012

Gegeben ist ein Winkel mit dem Scheitel A und mit der Größe α, wobei gilt $0° < \alpha < 180°$. Auf den Schenkeln dieses Winkels wähle man sich je einen von A verschiedenen Punkt B bzw. C aus, so dass ein Dreieck ABC entsteht. In diesem Dreieck schneiden sich die durch B bzw. C verlaufenden Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC in einem Punkt I.

Weisen Sie nach, dass die Größe δ des Winkels $\sphericalangle BIC$ nicht von der gewählten Lage der Punkte B und C abhängt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

501013

Man kann eine achtstellige Zahl bilden, indem man sich eine vierstellige Zahl ausdenkt und diese zweimal hintereinander schreibt.

Finden Sie

a) die größte und
b) die kleinste

von eins verschiedene natürliche Zahl, durch die jede achtstellige Zahl dieser Form teilbar ist.

Hinweis: Eine Zahl heißt n-stellig, wenn sie n Ziffern besitzt, wobei die erste nicht Null sein darf.

501014

Es seien p und $p^2 + 2$ Primzahlen. Finden Sie alle Zahlen n mit $n = 1, 5, 9, 13, \dots$ (also alle natürlichen Zahlen n, die bei Division durch 4 den Rest 1 lassen), für die auch $p^n + 2$ eine Primzahl ist.

501015

Gegeben sind ein Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt f sowie von den Eckpunkten verschiedene Punkte D auf $\overline{AB}$, E auf $\overline{BC}$ und F auf $\overline{AC}$. Letztere bestimmen zusammen mit den Eckpunkten des Dreiecks vier Teildreiecke ADF, DBE, FEC und DEF, deren Flächeninhalte in dieser Reihenfolge mit v, w, x bzw. y bezeichnet seien.

Die Punkte D, E, F erfüllen weiter die folgenden drei Eigenschaften:

$$\overline{EF} \parallel \overline{AB} \tag{1}$$

$$v + w = \frac{2}{5} f \tag{2}$$

$$x : y = v : w \tag{3}$$

Bestimmen Sie aus diesen Angaben v, w, x und y in Abhängigkeit von f.

501016

Aus der Menge $M = \{1; 2; 3; \dots; 179\}$ werden drei verschiedene Zahlen zufällig und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge ausgewählt.

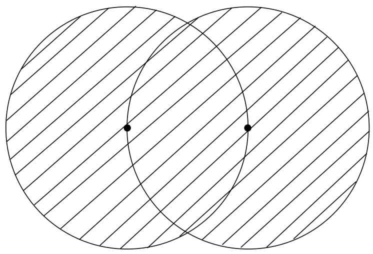
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie die Gradzahlen der Innenwinkel eines Dreiecks sind?

50. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 11–13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

501311

Zwei Kreise mit gleichem Radius r schneiden sich so, dass der Mittelpunkt jedes Kreises auf dem Rand des jeweils anderen Kreises liegt, vgl. nebenstehende Abbildung.



Man bestimme den Flächeninhalt und den Umfang der schraffierten Fläche.

501312

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x - yz + w &= 50 && (1)\\ x^2 + y^2 &= 13 && (2)\\ x^2 y &= 12 && (3)\\ x^y - yz^2 + w &= 0, && (4) \end{aligned}$$

und es sollen nur positive reelle Lösungsquadrupel (x, y, z, w) dieses Gleichungssystems betrachtet werden. Was ist der größtmögliche Wert, den das Produkt $xyzw$ für ein solches Lösungsquadrupel annimmt?

501313

Man bestimme alle reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{\sqrt{x+2}}{x} < 1.$$

501314

In einem Kurbad gibt es 100 Duschkabinen. In jeder Kabine befindet sich ein Hahn, der die Wasserzufuhr zur Dusche dieser Kabine regelt. Durch ein Versehen bei der Installation setzt aber jeder Hahn außerdem auch die Duschen in genau 5 anderen Kabinen in Betrieb.

Man beweise, dass die Kurverwaltung dann immer 10 Kabinen auswählen kann, in denen von der Fehlfunktion nichts zu bemerken ist, wenn die übrigen 90 Kabinen gesperrt werden.